

Vorlesung: Lineare Modelle

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

SoSe 2014

- Einführung und Beispiele
- ① Das einfache lineare Regressionsmodell
- ② Das multiple lineare Regressionsmodell
- Quadratsummenzerlegung und statistische Inferenz im multiplen linearen Regressionsmodell
- Diskrete Einflußgrößen: Dummy- und Effektkodierung, Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Navigationssymbole

Navigationssymbole

Modelle mit diskreten Einflussgrößen

Bei der ANOVA geht es um den Vergleich von Mittelwerten.

Die einfaktorielle Varianzanalyse hat die primäre Fragestellung:
Sind die Mittelwerte von verschiedenen Gruppen gleich?

Diese Frage lässt sich als lineares Modell darstellen. Wir verwenden eine diskrete Variable, die die Gruppenzugehörigkeit beschreibt.

Dummycodierung

Wir betrachten ein nominales Merkmal C mit K Ausprägungen.

a) Einfache Dummy-Kodierung

$$Z_k(C) = \begin{cases} 1 & \text{für } C = k; \\ 0 & \text{für } C \neq k; \end{cases} \quad k = 1, \dots, K \quad (4.1)$$

b) Effekt-Kodierung

$$Z_k^e(C) = \begin{cases} 1 & \text{für } C = k; \\ 0 & \text{für } C \neq k; C \neq K \\ -1 & \text{für } C = K; \end{cases} \quad k = 1, \dots, K-1; \quad (4.2)$$

Navigationssymbole

Navigationssymbole

Einfache Varianzanalyse

Gegeben sei eine nominale Einflussgröße C mit K Ausprägungen (Gruppen). Der Zielgrößenvektor Y wird in die K Gruppen mit jeweils n_k Beobachtungen aufgeteilt:

$$Y = (Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}, Y_{21}, \dots, Y_{Kn_k})'$$

a) Mittelwertsmodell:

$$Y_{kl} = \mu_k + \varepsilon_{kl} \quad l = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$Y = (Z_1(C) \dots Z_K(C)) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_K \end{pmatrix} + \varepsilon \quad (4.3)$$

b) Effekt-Kodierung:

$$Y_{kl} = \mu + \tau_k + \varepsilon_{kl}; \quad \sum_{k=1}^K \tau_k = 0$$

$$Y = (e \ Z_1^e(C) \dots Z_{K-1}^e(C)) \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{K-1} \end{pmatrix} + \varepsilon \quad (4.4)$$

Design-Matrix X für $K = 3$ Gruppen mit je $n_k = 2$ Beobachtungen pro Gruppe.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Design-Matrix X für $K = 3$ Gruppen mit je $n_k = 2$ Beobachtungen pro Gruppe:

Die Regressionsgleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{pmatrix}$$

c) Modell mit Referenzkategorie K :

$$Y_{kl} = \mu_K + \tau_k + \varepsilon_{kl}; \quad \tau_K = 0;$$

$$Y = (e \ Z_1(C) \dots Z_{K-1}(C)) \begin{pmatrix} \mu_K \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{K-1} \end{pmatrix} + \varepsilon \quad (4.5)$$

Design-Matrix X für 3 Gruppen mit je 2 Beobachtungen pro Gruppe:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nullhypothesen zum Test auf „Effekt von C“

- a) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K$
- b) $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{K-1} = 0$
- c) $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{K-1} = 0$

Bemerkungen

- Alle 3 Kodierungen führen zu gleicher Modellanpassung (R^2)
- Parameter haben unterschiedliche Interpretation
- Parameter und deren Schätzungen aus verschiedenen Varianten direkt ineinander überführbar
- Modelle erweiterbar mit zusätzlichen Einflussgrößen

Zusammenhang zwischen Kodierungen

Mittelwertsmodell:	μ_1, \dots, μ_K	kein Intercept
Effektkodierung:	$\mu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mu_k$	\leftrightarrow Intercept
	$\tau_k = \mu_k - \mu$	„Unterschied zum Gesamtmittel“
	$\Leftrightarrow \mu_k = \mu + \tau_k$	
Referenzkodierung:	$\mu = \mu_K$	\leftrightarrow Intercept
	$\tau_k = \mu_k - \mu_K$	„Unterschied zur Referenz“
	$\Leftrightarrow \mu_k = \mu_K + \tau_k$	

Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse

Wir betrachten zwei diskrete Einflussgrößen C und D mit K_1 bzw. K_2 Ausprägungen. Man spricht dann von einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit einem K_1 -stufigen und einem K_2 -stufigen Faktor. Hier ist die Mittelwertsdarstellung nicht möglich.

a) Modell mit einfachen Effekten (Effektdarstellung)

Beispiel: Designmatrix

$$Y = (e \ Z_1^e(C) \dots Z_{K_1-1}^e(C) Z_1^e(D) \dots Z_{K_2-1}^e(D)) \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{K_1-1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{K_2-1} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Test auf Effekt von C: $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_{K_1-1} = 0$

Test auf Effekt von D: $H_0 : \gamma_1 = \dots = \gamma_{K_2-1} = 0$

Interpretation:

τ_k, γ_l Abweichung vom Gesamtmittel der Kategorien

Modell mit einem zweistufigen und einem dreistufigen Faktor und jeweils zwei Beobachtungen pro Faktorkombination

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: 2 kategoriale Einflussgrößen

Graphische Darstellung

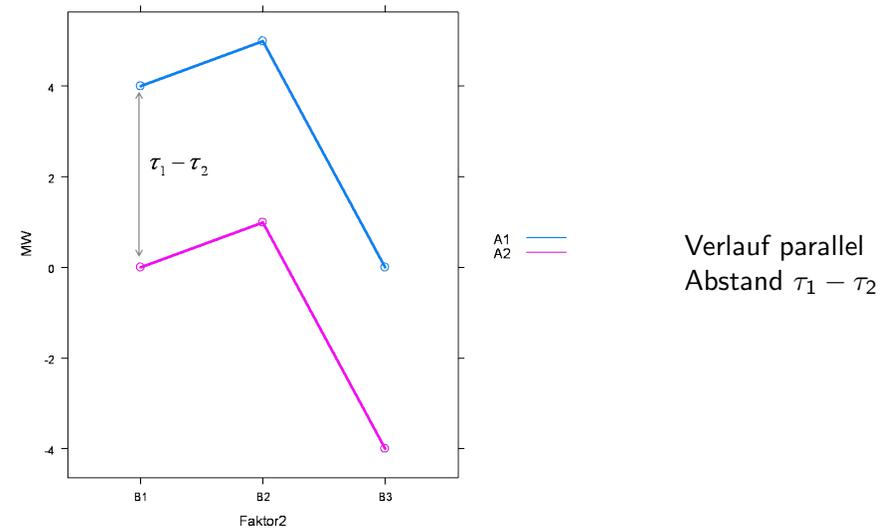
$$\mu = 1$$

Faktor A (2-stufig): $\tau_1 = 2 \Rightarrow \tau_2 = -2$

Faktor B (3-stufig): $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2 \Rightarrow \gamma_3 = -3$

Berechnung der Mittelwerte:

Faktor A	Faktor B	MW
1	1	$1 + 2 + 1 = 4$
1	2	$1 + 2 + 2 = 5$
1	3	$1 + 2 - 3 = 0$
2	1	$1 - 2 + 1 = 0$
2	2	$1 - 2 + 2 = 1$
2	3	$1 - 2 - 3 = -4$



$$Y = (e \ Z_1(C) \dots Z_{K_1-1}(C) Z_1(D) \dots Z_{K_2-1}(D)) \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{K_1-1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{K_2-1} \end{pmatrix} + \epsilon \quad (4.7)$$

Interpretation:
 τ_k, γ_l Abweichung von der Referenzkategorie

b) Modell mit Interaktion

Interaktionen lassen sich durch Aufnahme aller Produktterme $Z_k^e(C)Z_l^e(D)$ modellieren:

$$E(Y) = (e, Z_1^e(C) \dots Z_{K_2-1}^e(D), Z_1^e(C)Z_1^e(D) \dots Z_{K_1-1}^e(C)Z_{K_2-1}^e(D)) \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \gamma_{K_2-1} \\ (\tau\gamma)_{11} \\ \vdots \\ (\tau\gamma)_{K_1-1, K_2-1} \end{pmatrix}$$

Test auf Interaktion:

$$H_0 : (\tau\gamma)_{11} = \dots = (\tau\gamma)_{K_1-1, K_2-1} = 0$$

Modell mit einem zweistufigen und einem dreistufigen Faktor und jeweils zwei Beobachtungen pro Faktorkombination

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Design-Matrix X für 2-Faktor Modell mit einem zweistufigen und einem dreistufigen Faktor: (jeweils eine Beobachtung pro Merkmalskombination).

$$X\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ (\tau\gamma)_{11} \\ (\tau\gamma)_{12} \end{pmatrix}$$

Beispiel: 2 kategoriale Einflussgrößen mit Interaktion

$\mu = 1$

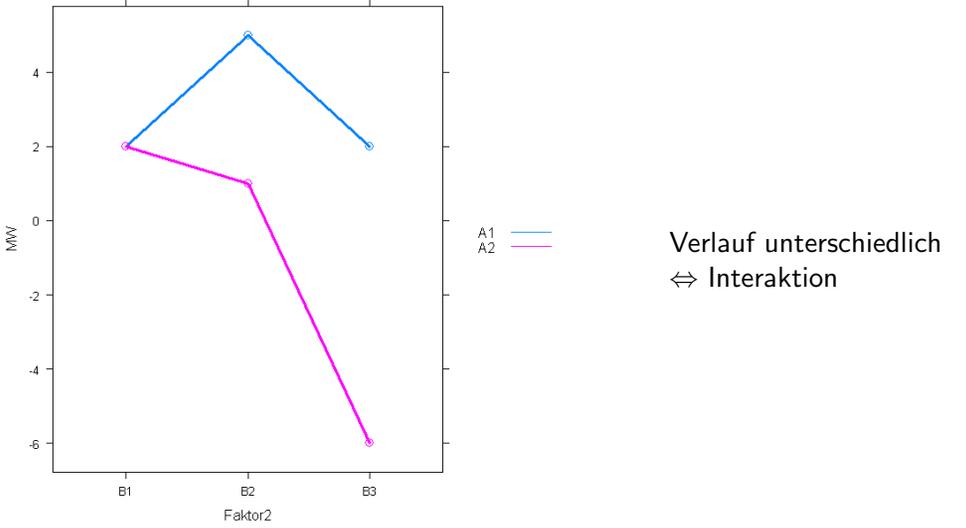
Faktor A (2-stufig): $\tau_1 = 2 \Rightarrow \tau_2 = -2$
 Faktor B (3-stufig): $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2 \Rightarrow \gamma_3 = -3$

Interaktion: $(\tau\gamma)_{11} = -2 \quad (\tau\gamma)_{21} = 2$
 $(\tau\gamma)_{12} = 0 \quad (\tau\gamma)_{22} = 0$
 $(\tau\gamma)_{13} = 2 \quad (\tau\gamma)_{23} = -2$

Berechnung der Mittelwerte:

Faktor A	Faktor B	MW
1	1	$1 + 2 + 1 - 2 = 2$
1	2	$1 + 2 + 2 + 0 = 5$
1	3	$1 + 2 - 3 + 2 = 2$
2	1	$1 - 2 + 1 + 2 = 2$
2	2	$1 - 2 + 2 + 0 = 1$
2	3	$1 - 2 - 3 - 2 = -6$

Graphische Darstellung



Erweiterung auf Kombination von diskreten und stetigen Merkmalen (Kovarianzanalyse)

Beispiel für Design-Matrix X für $K = 3$ Gruppen mit je $n_k = 2$ Beobachtungen pro Gruppe und stetigem Merkmal x :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$$

Interpretation:
 In den drei Gruppen drei parallele Geraden mit Achsenabschnitt α_j und Steigung β_4

Erweiterung auf Geraden mit versch. Steigung

Modell:

$$Y_{kl} = \alpha_k + \beta_k X_{kl} + \varepsilon_{kl} \tag{4.8}$$

Matrixdarstellung (3 Gruppen, 2 Beobachtungen pro Gruppe)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Interaktion bedeutet Steigungen verschieden.

Test auf Interaktion: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

Darstellung mit Referenzkodierung

Modell:

$$Y_{kl} = \alpha_3 + \alpha_k + \beta_3 X_{kl} + \beta_k X_{kl} + \varepsilon_{kl} \quad (k = 1, 2)$$

$$Y_{kl} = \alpha_3 + \beta_3 X_{kl} + \varepsilon_{kl} \quad (k = 3)$$

Matrixdarstellung (3 Gruppen 2 Beobachtungen pro Gruppe)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 & x_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 & x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 & 0 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Interaktion bedeutet Steigungen verschieden.

Test auf Interaktion: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

Beispiel: Vorher-Nachher Vergleich in randomisierter Studie

- X1 : Blutwert zum Zeitpunkt 1
- X2 : Blutwert zum Zeitpunkt 2
- Z : Gruppenzugehörigkeit (0= Placebo / 1= Verum)
oder auch allgemeine Gruppierungsvariable

Fragestellung: Gibt es einen Unterschied zwischen den Gruppen ?

- Variante 1:** Betrachte Differenzen $X_2 - X_1 = D$ und führe 2 Stichproben t-Test durch
Vorteil: Einfach und leicht interpretierbar
- Variante 2:** Regression $X_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma * Z + \epsilon$
Teste die Nullhypothese: $H_0 : \gamma = 0$
Vorteil: „Regression to the mean“ und mögliche Abhängigkeit der Differenz vom Anfangswert wird berücksichtigt.

Typen von Quadratsummen

In der Literatur unterscheidet man 3 Typen von Quadratsummen:

- Typ1** Sequentielle Quadratsummen
- Typ2** Partielle Quadratsummen ohne höhere Interaktionsterme
- Typ3** Partielle Quadratsummen

Beispiel mit Effekten X1 X2 X3 X1*X2 X1*X3 X2*X3 X1*X2*X3

Effekt	Variablen im Modell bei		
	Typ1	Typ3	Typ2
X1	-	alle anderen	X2 X3 X2*X3
X2	X1	alle anderen	X1 X3 X1*X3
X1*X2	X1 X2 X3	alle anderen	X1 X2 X3 X1*X3 X2*X3
X1*X2*X3	alle anderen	alle anderen	alle anderen

Beachte: Falls Interaktionen vorhanden sind, sind die einfachen Koeffizienten schwer direkt interpretierbar!